Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 25–33

УДК 517.54

А. К. Бахтин

(*Институт математики НАН Украины, Киев*)

alexander.bahtin@yandex.ru

Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей

Посвящается 70-летию профессора Юрия Борисовича Зелинского

Работа посвящена исследованию экстремальных проблем геометрической теории функций комплексного переменного, связанных с оценками функционалов, заданных на системах неналегающих областей. Рассматривается некоторый частный случай известной проблемы В. Н. Дубинина об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

Paper is devoted to extremal problems of geometric function theory associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains. In particular some special case of the well-known Dubinin's problem about extremal decomposition of the complex plane is considered.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $r(B,a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1–3]).

Определение 1. *Систему точек* $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *назовем* n*-лучевой, если* $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, *и*

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \cdots < \arg a_n < 2\pi.$$

Обозначим: $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, $\Gamma := \{w \in \mathbb{C} := |w| = 1\}$.

В 1994 году в работе [1] была сформулирована одна открытая экстремальная проблема о неналегающих областях со свободными полюсами. Эта задача вызвала большой интерес и изучалась во многих работах (см., например, [1–12]).

Задача [1, с. 68]. Показать, что для попарно непересекающихся областей B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geq 2$, в $\overline{\mathbb{C}}$, точек $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, числа $\gamma \leq n$, максимум произведения

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right),$$

достигается для некоторой конфигурации из областей B_k и точек a_k, обладающей n-кратной симметрией.

В данный момент по этой проблеме известны только частичные результаты, в целом она не решена. При $\gamma = 1$ и $n \geq 2$ эта задача была решена в работе [1], причем из метода этой работы следует, что результат верен и при $0 < \gamma < 1$. Л. В. Ковалев [4] получил решение этой проблемы при существенных ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно: для $n \geq 5$ и подкласса систем точек, удовлетворяющих условию $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$. Ясно, что эти условия являются достаточно жесткими и существенно сужающими множество допустимых конфигураций. Эта задача также изучалась при $\gamma \in (0,1]$ в случае односвязных областей (см. [6]). В дальнейшем в работах [7–12] рассматривались частные случаи этой проблемы.

Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $n = 2$, $\gamma \in (0, \gamma_2]$, $\gamma_2 = 1{,}6$. *Тогда для произвольных различных точек* $a_k \in \Gamma$, $k = 1{,}2$, *и любых взаимно непересекающихся односвязных областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1{,}2}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \leq \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_0, a_1, a_2 *и*

B_0, B_1, B_2, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

Теорема 2. *Пусть $n=3$, $\gamma \in (0,\gamma_3]$, $\gamma_3 = 2$. Тогда для произвольных попарно различных точек $a_k \in \Gamma$, $k=\overline{1,3}$, и любых взаимно непересекающихся односвязных областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,3}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{3} r\left(B_k,a_k\right) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{4\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\frac{\gamma}{9}\right)^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда $\{a_k\}_{k=0}^{3}$ и $\{B_k\}_{k=0}^{3}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(9-\gamma)w^3+\gamma}{w^2(w^3-1)^2}\,dw^2.$$

Сформулируем один вспомогательный результат, который является обобщением соответствующего результата работы [5] для произвольного $\gamma > 0$ и $n \geq 2$.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$. Пусть система взаимно непересекающихся односвязных областей $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ такова, что $0 \in B_0$, $a_k \in B_k \cap \Gamma$, $k = \overline{1,n}$ и $r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \geq J_n^0(\gamma)$. Тогда имеет место неравенство*

$$r\left(B_0,0\right) \leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}}\, J_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}},$$

где

$$J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Доказательство. Предположим, что

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\geq \Delta,$$

где Δ – некоторое положительное число. Для компактного множества $E\subset\mathbb{C}$ обозначим через $m(E)$ его плоскую меру Лебега, через $d(E)$ – трансфинитный диаметр [13, с. 286]. Тогда для B_k, $k=\overline{1,n}$, имеем

$$r\left(B_0,0\right)=r\left(B_0^{+},\infty\right)=\frac{1}{d(\mathbb{C}\backslash B_0^{+})}\leq\frac{1}{d\left(\cup_{k=1}^{n}\overline{B_k^{+}}\right)},$$

где $B^{+}=\{z:1/\overline{z}\in B\}$. Из работы [13, с. 34] следует, что

$$m(B_k)\geq\pi r^2\left(B_k,a_k\right),\quad k=\overline{1,n}.$$

Учитывая [13, с. 292], имеем

$$d\left(\cup_{k=1}^{n}\overline{B_k^{+}}\right)\geq\sqrt{\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}m\left(\overline{B_k^{+}}\right)}\geq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}r^2\left(B_k,a_k\right)}.$$

Отсюда

$$r\left(B_0,0\right)\leq\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}r^2\left(B_k,a_k\right)}}. \tag{1}$$

По нашему предположению

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}r^2\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}}}\geq\Delta. \tag{2}$$

Полагая $\Delta=J_n^0(\gamma)$, используя неравенство Коши и соотношение (2), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}r^2\left(B_k,a_k\right)\geq\left(n\cdot\left(J_n^0(\gamma)\right)^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{n-\gamma}}. \tag{3}$$

Из (1) и (3), получаем неравенство

$$r\left(B_0,0\right) \le n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} J_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала покажем, что утверждение Теоремы 1 справедливо для $n = 2$ при $\gamma = 1{,}6$. Метод доказательства базируется на применении метода разделяющего преобразования областей. Описание разделяющего преобразования областей для данного случая проведено в [11]. Пусть $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < 2\pi$, $\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1)$, $\alpha_2 := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_2)$. Тогда, аналогично доказательству [2, Теорема 5.2.3], получаем неравенство

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \le \left[\prod_{k=1}^{2} \alpha_k r^{\gamma\alpha_k^2}(\Lambda_0,0) r(\Lambda_1,i) r(\Lambda_2,-i)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где Λ_k, $\{k\} = \{0,1,2\}$, — круговые области квадратичного дифференциала (1). Рассмотрим случай, когда $\alpha_0 \ge \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, где $\alpha_0 = \max\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Согласно работам [1, 2, 4], максимум функционала имеет вид:

$$J_2^0(\gamma) = r^{\gamma}(\Lambda_0,0) \prod_{k=1}^{2} r(\Lambda_k,\lambda_k) = \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Таким образом, при $\gamma = 1{,}6$ и $n = 2$, получаем, что $J_2^0(1{,}6) \approx 0{,}560264$. Имеет место равенство

$$r^{1,6}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) =$$

$$= r^{0,6}\left(B_0,0\right)\left(r\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right)\right).$$

Согласно Лемме 1, имеем $r^{0,6}(B_0,0) \le 0{,}843074 < 1$. Применив к произведению $r\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right)$ теорему Голузина [13, с.165], имеем

$$J_2(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \le$$

$$\le 0{,}843074 \cdot \frac{128}{81\sqrt{3}} \sin\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1{,}6}}\right) \le 0{,}470351.$$

Отсюда

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \le 0{,}470351 < J_2^0(1{,}6) = 0{,}560264.$$

Таким образом, для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ выполняется неравенство

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) < J_2^0(\gamma).$$

Остается рассмотреть случай, когда $\alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, для которого теорема 1 имеет место, согласно работе [12]. Стандартными методами несложно показать, что

$$\frac{J_2(\gamma)}{J_2^0(\gamma)} \leq \frac{J_2(1{,}6)}{J_2^0(1{,}6)} < 1$$

на промежутке $\gamma \in (1; 1{,}6]$ является монотонно возрастающей функцией по γ. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *В работе* [11] *доказано утверждение Теоремы* 1 *для* $n = 2$ *и* $\gamma \in (0;\, 1{,}4]$.

Доказательство теоремы 2. С помощью разделяющего преобразования получаем следующее неравенство:

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) \prod_{k=1}^{3} r\left(B_k,a_k\right) \leq \left[\ \prod_{k=1}^{3} \alpha_k r^{\gamma\alpha_k^2}(\Lambda_0,0) r(\Lambda_1,i) r(\Lambda_2,-i)\ \right]^{\frac{1}{2}},$$

где Λ_k, $k \in \{0,1,2\}$, – круговые области квадратичного дифференциала (2). Докажем, что это неравенство имеет место при $\gamma = 2$. Для этого покажем, что для экстремальной конфигурации областей выполняется неравенство $\alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$. Допустим противоположное, а именно: $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Справедлива цепочка равенств

$$(J_3(\gamma))^2 = \left(r^2\left(B_0,0\right) \prod_{k=1}^{3} r\left(B_k,a_k\right)\right)^2 = r^4\left(B_0,0\right)\left(\prod_{k=1}^{3} r\left(B_k,a_k\right)\right)^2 =$$

$$= r\left(B_0,0\right) r^3\left(B_0,0\right)\left(\prod_{k=1}^{3} r\left(B_k,a_k\right)\right)^2 =$$

$$= r\left(B_0,0\right)\left(r\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right)\right) \times$$

$$\times \left(r\left(B_0,0\right) r\left(B_2,a_2\right) r\left(B_3,a_3\right)\right)\left(r\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_3,a_3\right)\right) =$$

$$= r\left(B_0,0\right)\left(r^{1{,}5}\left(B_0,0\right) \prod_{k=1}^{3} r\left(B_k,a_k\right)\right)^2.$$

Согласно [1, 2, 4], максимум функционала

$$J_3^0(\gamma) = r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{3} r(\Lambda_k, \lambda_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{4\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\frac{\gamma}{9}\right)^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

При $\gamma = 2$ и $n = 3$, получаем, что $J_3^0(2) \approx 0{,}304346$. Согласно Лемме 1

$$r(B_0, 0) \leq 0{,}632339 < 1.$$

На основании теоремы Голузина [13, с.165] получаем:

$$(J_3(\gamma))^2 \leq 0{,}632339 \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^3 \prod_{k=1}^{3} |a_1 - a_2||a_1 - a_3||a_2 - a_3|.$$

Отсюда

$$|a_1 - a_2| = 2 \sin \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right),$$

$$|a_1 - a_3| = |a_2 - a_3| = 2 \sin \frac{\pi}{4} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом,

$$(J_3(\gamma))^2 \leq$$

$$\leq 8 \cdot 0{,}632339 \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^3 \sin \frac{\pi}{2} \left(2 - \sqrt{2}\right) \left(\sin \frac{\pi}{4} \left(2 - \sqrt{2}\right)\right)^2 \leq 0{,}075333.$$

То есть

$$J_3(2) = 0{,}274469 < J_3^0(2).$$

Для случая $\alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ Теорема 2 имеет место согласно работе [12]. Стандартными методами показываем, что

$$\frac{J_3(\gamma)}{J_3^0(\gamma)} \leq \frac{J_3(2)}{J_3^0(2)} < 1$$

на промежутке $\gamma \in (1, 2]$ является монотонно возрастающей функцией по γ. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. *В работе* [10] *доказано утверждение Теоремы* 2 *для* $n = 3$ *и* $\gamma \in (0; 1{,}5]$.

Список литературы

[1] *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1(295). — С. 3 – 76.

[2] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — **73**. — 308 с.

[3] *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. — Владивосток: "Дальнаука" ДВО РАН, 2009. — 390 с.

[4] *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальнев. матем. сб. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

[5] *Ковалев Л. В.* О трех непересекающихся областях // Дальнев. матем. сб. — 2000. — **1**. — С. 3 – 7.

[6] *Кузъмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. — СПб.: ПОМИ, 2003. — **302**. — С. 52 – 67.

[7] *Бахтина Г. П., Бахтин А. К.* Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2006. — **3**., № 4, — С. 273 – 281.

[8] *Заболотний Я. В.* Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013. — **10**, №4-5. — С. 557 – 564.

[9] *Бахтин А. К., Денега И. В.* Об одной проблеме В. Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013. — **10**, №4-5. — С. 401 – 411.

[10] *Заболотний Я. В.* Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №1. — С. 24 – 31.

[11] *Бахтін О. К., Заболотний Я. В.* Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей // Доп. НАН України. — 2013. — №10. — С. 7 — 10.

[12] *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — **62**, № 2. — P. 83 – 92.

[13] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

[14] *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

[15] *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.